

GYMNASIUM

MEHR
ERFAHREN

KLAUSUREN

Mathematik Oberstufe

Bayern

CLAUDIA HAGAN



STARK

Inhalt

Vorwort

Klausuren zum Themenbereich 1: Änderungsverhalten von Funktionen – Koordinatengeometrie im Raum: Punkte und Vektoren	1
Klausur 1	2
Analysis 100 %: Ableitungsregeln (Summen-, Produkt- und Quotientenregel); Begriff der Differenzierbarkeit (Abgrenzung differenzierbarer und nicht differenzierbarer Funktionen); Aufstellen einer ganzrationalen und einer gebrochenrationalen Funktion zu vorgegebenen Eigenschaften; Kurvendiskussion einer ganzrationalen Funktion ohne Parameter, Newton-Verfahren	
Klausur 2	10
Analysis 100 %: Produkt- und Quotientenregel; Kurvendiskussion einer ganzrationalen Funktion ohne Parameter; Gebrochenrationale Funktion mit Parameter (Kurvendiskussion) im Sachkontext: Differenzialquotient, Parameter zu gegebenen Bedingungen bestimmen, Grundwissen: Lösen eines 2 x 2-linearen Gleichungssystems, Lokale Änderungsrate	
Klausur 3	19
Analysis 100 %: Ermitteln einer Stammfunktion; Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktion (Erschließen von Eigenschaften aus den Graphen); Berührungspunkt zweier ganz-rationaler Funktionen; Untersuchung einer ganzrationalen Funktion im Sachkontext: Extremwertbestimmung, Interpretation, Newton-Verfahren	
Klausur 4	29
Analysis 50 %: Gebrochenrationale Funktion mit Parameter im Anwendungsbezug: Quotientenregel, Parameter zu gegebenen Bedingungen bestimmen, Differenzen- und Differenzialquotient und ihre Deutung, Interpretation funktionaler Zusammenhänge im Sachkontext Geometrie 50 %: Darstellen von Punkten im dreidimensionalen Koordinatensystem; Koordinatenachsen und -ebenen; Spiegeln an Koordinatenebenen; Rechnen mit Vektoren (Vektoraddition, Skalarmultiplikation); Beträge von Vektor (Längen); Dreieck	
Klausur 5	37
Analysis 50 %: Tangentengleichung bestimmen; Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktion bei gebrochenrationaler Funktion (Eigenschaften der Graphen); Abgrenzung der Begriffe „absolute Änderung“, „mittlere Änderungsrate“ und „momentane Änderungsrate“ Geometrie 50 %: Vektorgleichung lösen; Skalarprodukt; orthogonale Vektoren; Vektorprodukt; Flächeninhalt eines Parallelogramm; Interpretation einer Punktmenge im Raum; Beträge von Vektoren (Längen); Parameterbestimmung für gleichseitiges Dreieck	

Klausuren zum Themenbereich 2: Weitere Ableitungsregeln – Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion – Koordinatengeometrie im Raum – Wahrscheinlichkeitsbegriff – Anwenden der Differenzial- rechnung	45
Klausur 6	46
Analysis 80 %: Exponentialfunktion im Sachkontext: Zusammenhang Funktion– Ableitungsfunktion im Sachzusammenhang, Grenzwerte, Quotienten- und Kettenregel, Monotonie, Graph zeichnen	
Geometrie 20 %: Skalarprodukt; Vektorprodukt; Orthogonalität von Vektoren	
Klausur 7	53
Analysis 70 %: Ableitung von Sinus-, Exponential- und Wurzelfunktion; Produkt-, Quotienten- und Kettenregel; Definitionsbereich der natürlichen Logarithmusfunktion; Natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung im Sachzusammenhang; Grenzwert; Parameter zu gegebenen Bedingungen bestimmen	
Geometrie 30 %: Winkel zwischen zwei Vektoren; Vektorprodukt und geometrische Interpretation; Abstand zweier Kugeln	
Klausur 8	60
Analysis 50 %: Natürliche Exponentialfunktion im Anwendungszusammenhang; Ableitungs- und Grenzwertregeln, Monotonie und Extrema, Unterscheidung zwischen Absolutwert, Änderungsrate und stärkste Änderungsrate, komplexere Interpretationen im Sachzusammenhang	
Stochastik 50 %: Grundwissen: Empirisches Gesetz der großen Zahlen, Vierfeldertafel; Wahrscheinlichkeit von verknüpften Ereignissen; Unabhängigkeit von Ereignissen; Additionssatz	
Klausur 9	67
Analysis 50 %: Verschiebung, Spiegelung, Streckung/Stauchung des Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion; Allgemeine Kenntnisse über Funktionen; Widerlegen von Aussagen mithilfe von Gegenbeispielen	
Stochastik 50 %: Vierfeldertafel; Stochastische Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Ereignissen; Baumdiagramm und bedingte Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit von verknüpften Ereignissen	
Klausur 10	75
Analysis 90 %: Untersuchung einer Wurzelfunktion: Definitionsbereich, Asymptoten, Ableitungsregeln, Tangentengleichung; Natürliche Exponentialfunktion mit Parameter im Anwendungszusammenhang; Grenzwert, Ableitungsregeln, Monotonie und Extrema im Sachkontext, Einfluss des Parameters, Graph zeichnen	
Stochastik 10 %: Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Ereignissen; Additionssatz	

Klausuren zum Themenbereich 3: Flächeninhalt und bestimmtes Integral – Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen – Binomialverteilung und ihre Anwendung in der beurteilenden Statistik	83
Klausur 11	84
<p>Analysis 100 %: Ermitteln von Stammfunktionen mithilfe der Regeln für wichtige unbestimmte Integrale; Gebrochenrationale Funktion mit Parameter im Sachzusammenhang; Anpassung von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, Lösung eines 2×2-linearen Gleichungssystems, Grenzwert im Unendlichen, relative Abweichung in Prozent, Polynomdivision, bestimmtes Integral und Interpretation als Fläche, Stammfunktion einer gebrochenrationalen Funktion</p>	
Klausur 12.....	91
<p>Analysis 100 %: Flächenberechnung zwischen den Graphen ganzrationaler Funktionen; Bestimmtes Integral bei punktsymmetrischer Funktion und Interpretation; Integralfunktion Ermitteln einer Stammfunktion mit und ohne der Regeln für wichtige unbestimmte Integrale; Abgrenzung Terrassenpunkt und Extremum anhand von Beispielen</p>	
Klausur 13.....	98
<p>Analysis 40 %: Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktionen: Monotonie, Extrema, Wendepunkte; Aufstellen einer ganzrationalen Funktion anhand des Graphen; Bestimmen einer bestimmten Stammfunktion zu einer ganzrationalen Funktion; Graph zeichnen Stochastik 60 %: 3-mal-Mindestens-Aufgabe; Binomialverteilung; Erwartungswert, Standardabweichung, Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit und ohne Tafelwerk, Histogramm skizzieren und begründen, Bernoullikette im Sachzusammenhang</p>	
Klausur 14	105
<p>Analysis 35 %: Zusammenhang/Abgrenzung Funktion – Ableitungsfunktion – Stammfunktion – Integralfunktion – Kehrwertfunktion und Zuordnung der Graphen Stochastik 65 %: Anschauliches Verständnis von Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert und Standardabweichung sowie Berechnung bei nicht binomialverteilter Zufallsgröße; Hypothesen und Entscheidungsregel bei einem einseitigen Signifikanztest; Grundwissen: Abhängigkeit von Ereignissen am Baumdiagramm, Vergleich der beiden Urnenmodelle</p>	
Klausur 15	112
<p>Analysis 25 %: Definitionsmenge einer Integralfunktion; Ermitteln einer integralfreien Darstellung mithilfe der Regeln für wichtige unbestimmte Integrale Stochastik 75 %: 3-mal-Mindestens-Aufgabe; Erwartungswert und Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße; Intervall-Wahrscheinlichkeit mittels Tafelwerk; Erwartungswert einer Zufallsgröße explizit berechnen; Abgrenzung der Begriffe „Gewinn“, „Verlust“ und Reingewinn im Sachzusammenhang</p>	

Klausuren zum Themenbereich 4: Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung – Geraden und Ebenen im Raum 117

Klausur 16 118

Analysis 75 %: Grenzwert und Monotonie einer Exponentialfunktion; Erkennen wesentlicher Eigenschaften bei Verknüpfung von Exponential- und Sinusfunktion; Verlauf, Nullstellen und Periode der Sinusfunktion; Berührungspunkte zweier Funktionsgraphen; Begriffe „unbestimmte Divergenz“, „oszillierende“ und „beschränkte Funktion“; Tangensfunktion; bestimmtes Integral als Flächenbilanz

Geometrie 25 %: Parallelität von Geraden; Parameter bestimmen; Lineare Abhängigkeit zweier Vektoren; Aufstellen einer Ebenengleichung in Parameterform aus zwei echt parallelen Geraden

Klausur 17 126

Analysis 30 %: Definitionsmenge einer Integralfunktion; Ermitteln einer integralfreien Darstellung; Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion; Parallelität von Tangenten

Geometrie 70 %: Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden und Schnittpunktberechnung; Aufstellen einer Ebene durch drei Punkte; Koordinatenform einer Ebene; Abstand Punkt–Ebene; Lotgerade zu einer Ebene und Lotfußpunktbestimmung

Klausur 18 133

Analysis 50 %: Grundwissen: Zusammenhang Funktion–Umkehrfunktion; Flächenberechnung zwischen Funktion und Umkehrfunktion; bestimmtes Integral

Geometrie 50 %: Spiegelung von Punkten am Ursprung sowie an speziellen Geraden und Ebenen im Raum; Koordinatenachsen und -ebenen; einfache Parallelität von Ebenen; „Mathematischer Aufsatz“: Allgemeine Untersuchung der Lagebeziehung zweier Ebenen

Klausur 19 140

Geometrie 100 %: Aufstellen einer Ebene durch drei Punkte; Koordinatenform einer Ebene; Mittelpunkt einer Strecke; Innenwinkel und Flächeninhalt eines Parallelogramms; Lotgerade zu einer Ebene; Abstand eines Punktes auf einer Lotgeraden zu einer Ebene; Volumen einer Pyramide (elementargeometrisch); Grundwissen: Zentrische Streckung, Auswirkung des Streckungsfaktors auf das Volumen

Klausur 20 147

Geometrie 100 %: Geometrie im Anwendungskontext: Aufstellen einer Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform; Koordinaten von Punkten mit besonderer Lage im Koordinatensystem; Senkrechte Projektion von Punkten in eine Koordinatenebene; Größenordnung von Längen und Flächen abschätzen und im Sachkontext bewerten; Flächeninhalt von Trapezen und gleichschenkligen Dreiecken; Abstand Punkt–Ebene; Lotgerade und Lotfußpunktberechnung; anschauliches Verständnis von Schwerpunkt

Autorin: Claudia Hagan

Klausur 1

- BE
- 1** Gegeben sind folgende Funktionen f , g und h . Berechnen Sie die zugehörigen Ableitungsfunktionen. Die Termvereinfachung ist nicht verlangt.
- a) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 - 5x + 1$ 1
- b) $g: x \mapsto 3(x^2 + 5x + 1)(-x^3 + 7x - 1)$ 2
- c) $h: x \mapsto \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 1}$ 2
- 2** Geben Sie den Funktionsterm $f(x)$ einer Funktion an, die sich ohne Absetzen des Stifts zeichnen lässt und an der Stelle $x = 5$ definiert, aber nicht differenzierbar ist.
Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und zeichnen Sie den Graphen Ihrer Funktion in der Umgebung der Stelle $x = 5$. 3
- 3** Geben Sie einen Term einer ganzrationalen Funktion f an, die folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Bei $x = 1$ hat der Graph von f eine waagrechte Tangente.
(2) Die Steigung des Graphen von f ist nie positiv.
Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg. 4
- 4** Bestimmen Sie einen Term einer gebrochenrationalen Funktion f , die folgende drei Bedingungen erfüllt:
• G_f hat die schräge Asymptote $a(x) = 2x - 1$.
• G_f hat die senkrechte Asymptote $x = -3$.
• G_f hat eine Nullstelle $N(0|0)$.
Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg. 5
- 5** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^3 - 10,5x^2 + 30x - 22,5$; $x \in \mathbb{R}$
- a) Geben Sie das Verhalten im Unendlichen an.
Notieren Sie den Schnittpunkt von G_f mit der y -Achse.
Fertigen Sie eine Grobskizze für den möglichen Verlauf des Graphen G_f an. 2
- b) Bestimmen Sie die Punkte mit waagrechter Tangente rechnerisch.
Schließen Sie auf Monotonie und Art der Extrema. Argumentieren Sie anschaulich. 7

- c) Zeigen Sie, dass G_f für $x \in]1; 1,5[$ eine Nullstelle hat.
Ermitteln Sie dann in $T(1 | f(1))$ die Gleichung der Tangente t an G_f .
Zeichnen Sie auf einem separaten Blatt die Tangente und den Graphen der Funktion G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.
Platzbedarf in y -Richtung: $-23 < y < 5$
[Zwischenergebnis: $t(x) = 12x - 14$] 8
- d) Wenden Sie die Newton-Formel auf den Punkt T als Startwert an.
Was stellt der errechnete x_1 -Wert dar?
Erläutern Sie ausführlich unter Verwendung der Fachsprache das Newton-Verfahren. 6

Hinweise und Tipps

- 1 Ableitungsregeln anwenden (Merkhilfe!).
- 2 Standardbeispiel einer nicht differenzierbaren Funktion: Betragsfunktion
- 3 Stellen Sie zuerst einen möglichen Term der Ableitungsfunktion f' auf und schließen Sie dann auf $f(x)$.
- 4 Lösungsansatz: $f(x) = a(x) + r(x)$; $r(x)$ echt gebrochenrationaler Anteil.
- 5
 - Das Verhalten im Unendlichen wird nur durch die höchste Potenz von x bestimmt.
 - Die Grobskizze des Graphen G_f kann für die folgenden Aufgaben nützlich sein.
 - Benutzen Sie für b die Merkhilfe.
 - Berechnen Sie bei c die Funktionswerte der gegebenen Intervallgrenzen.
 - Für die Gleichung der Tangente benötigen Sie deren Steigung sowie einen Punkt.
 - Die Merkhilfe enthält die Newton-Formel. Vorgehensweise möglichst gut in Worte fassen.

Vertiefende Hinweise zum Lösen der Aufgaben finden Sie in

Abitur-Training Analysis (Buch-Nr.: 9400218)

- 1.3 Ganzrationale Funktionen
- 1.4 Gebrochenrationale Funktionen
- 3.1 Grenzwerte vom Typ $x \rightarrow \pm\infty$
- 3.3 Asymptoten
- 4.1 Differenzierbarkeit
- 4.2 Ableitungsregeln
- 4.4 Tangenten und Normalen
- 4.5 Newton-Verfahren
- 5.1 Steigungsverhalten
- 5.2 Relative Extrema
- 10 Steckbriefaufgaben

Lösung

BE

- 1 a) ⌚ 1 Minute, 🧠

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 - 5x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 - 5$$

1

- b) ⌚ 3 Minuten, 🧠

$$g(x) = 3 \cdot \underbrace{(x^2 + 5x + 1)}_{u(x)} \underbrace{(-x^3 + 7x - 1)}_{v(x)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 3 \cdot \left[\underbrace{(2x + 5)}_{u'(x)} \underbrace{(-x^3 + 7x - 1)}_{v(x)} \right] \quad \text{Produktregel}$$

1

$$+ \underbrace{(x^2 + 5x + 1)}_{u(x)} \underbrace{(-3x^2 + 7)}_{v'(x)}$$

1

- c) ⌚ 3 Minuten, 🧠

$$h(x) = \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

$$h'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 15x^2 - (5x^3 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Quotientenregel

2

- 2 ⌚ 6 Minuten, 🧠🧠

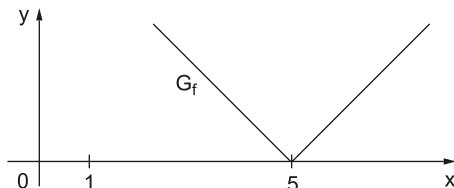
Die Betragsfunktion $g(x) = |x|$ lässt sich z. B. an der Stelle $x=0$ ohne Absetzen des Stifts durchzeichnen, ist dort aber nicht differenzierbar; ihr Graph hat an dieser Stelle einen Knick. Die gesuchte Funktion soll diese Eigenschaften bei $x=5$ aufweisen. Um dies zu erreichen, verschiebt man den Graphen der Betragsfunktion um 5 Einheiten nach rechts.

1

Die zugehörige Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = |x - 5|$$

1



1

Klausur 11

BE

1 Berechnen Sie die Menge aller Stammfunktionen (das unbestimmte Integral). Dokumentieren Sie dabei Ihr Vorgehen ausführlich unter Angabe der verwendeten Regeln. Vereinfachen Sie die Ergebnisse.

a) $g: x \mapsto 5x \cdot e^{x^2+3} \quad x \in \mathbb{R}$

3

b) $k: x \mapsto \ln(x^2)+7 \quad x \in \mathbb{R}^+$

5

2 Eine Supermarktkette führt eine neue Sorte Bodylotion ein, für die ganz besonders Werbung gemacht wird. In den ersten fünf Wochen ergeben sich folgende Verkaufszahlen:

Verkaufswoche x	1	2	3	4	5
verkaufte Stückzahl $f(x)$	26	45	62	75	86

Modellhaft werden die Verkaufszahlen durch eine Funktionenschar f der folgenden Form beschrieben:

$$f: x \mapsto \frac{a \cdot x + 30}{c \cdot x + 30} \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+ \quad a > 0 \quad c > 0$$

a) Eigentlich gilt im Sachzusammenhang $x \in \mathbb{N}$, dennoch ist es in der Infinitesimalrechnung sinnvoll, als Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ zu wählen. Nehmen Sie dazu begründet Stellung.

2

b) Berechnen Sie anhand der Verkaufszahlen für die erste und die fünfte Woche die Parameter a und c .

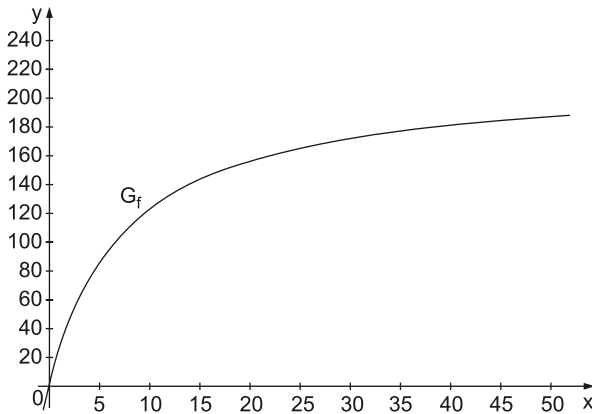
[Zwischenergebnis: $f(x) = \frac{854x + 30}{4x + 30}$]

7

c) Zeigen Sie, dass der angegebene Funktionsterm auch die Verkaufszahlen der dazwischenliegenden Wochen gut wiedergibt.

3

Auf der folgenden Abbildung ist der Graph der Funktion für das erste Verkaufsjahr abgebildet.



- d) Wie entwickeln sich die Verkaufszahlen nach dem Modell langfristig?
Wie entwickeln sich die Zahlen im ersten Verkaufsjahr? Um wie viel Prozent weichen die Verkaufszahlen nach einem Jahr noch von den langfristig erwarteten Werten ab? 7

- e) Zeigen Sie, dass sich der Term der Funktion f folgendermaßen umschreiben lässt:

$$f(x) = 213,5 - \frac{6\,375}{4x + 30} \quad 2$$

- f) Zeichnen Sie im Graphen ein, wodurch die Anzahl der innerhalb des ersten Jahres verkauften Bodylotions wiedergegeben wird. Berechnen Sie dann, wie viele Bodylotions im ersten Jahr verkauft wurden. 11

Hinweise und Tipps

- 1
 - Verwenden Sie bei Aufgabe a die Regel für $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx$ aus der Merkhilfe.
 - Schreiben Sie bei Aufgabe b zunächst den Term um, sodass Sie die Regel für $\int \ln x dx$ aus der Merkhilfe anwenden können.

- 2
 - Überlegen Sie bei Aufgabe a, welche Voraussetzungen eine Funktion mindestens erfüllen muss, damit Differenzieren und Integrieren möglich ist.
 - Stellen Sie für Aufgabe b zwei Bedingungen auf und lösen Sie das lineare Gleichungssystem.
 - Berechnen Sie für Aufgabe c die entsprechenden Wertepaare.
 - Langfristige Entwicklung bedeutet Verhalten für $x \rightarrow \infty$, Verkaufszahlen nach einem Jahr bedeutet $x = 52$.
 - Führen Sie für Aufgabe e eine Polynomdivision durch.
 - Die aufsummierte Anzahl der verkauften Lotions ergibt sich als Fläche unter dem Graphen. Dies entspricht rechnerisch einem bestimmten Integral.

Vertiefende Hinweise zum Lösen der Aufgaben finden Sie in

Abitur-Training Analysis (Buch-Nr.: 9400218)

- 1.4 Gebrochenrationale Funktionen
- 3.1 Grenzwerte vom Typ $x \rightarrow \pm\infty$
- 4.1 Differenzierbarkeit
- 5.1 Steigungsverhalten
- 7.1 Stammfunktionen
- 7.2 Das bestimmte Integral
- 9.1 Erste elementare Integrationsregel
- 9.3 Dritte elementare Integrationsregel

Lösung

BE

1 Bei beiden Integrationen werden die Formeln der Merkhilfe benötigt.

a) ⌚ 5 Minuten, 🧠🧠

$$\int 5x \cdot e^{x^2+3} dx = ?$$

Es wird die Regel $\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$ verwendet. 0,5

$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad 0,5$$

$$\int 5xe^{x^2+3} dx = 2,5 \cdot \int 2x \cdot e^{x^2+3} dx \quad \text{Eigenschaften des Integrals} \quad 1$$

$$= 2,5 \cdot e^{x^2+3} + C \quad \text{Formel aus der Merkhilfe} \quad 1$$

b) ⌚ 7 Minuten, 🧠🧠

$$\int (\ln(x^2) + 7) dx = ?$$

Es wird die Formel $\int \ln x dx = -x + x \ln x + C$ verwendet. 1

Dazu wird der Term umgeschrieben, was wegen $x \in \mathbb{R}^+$ ohne weitere Überlegung möglich ist: 1

$$\int (\ln(x^2) + 7) dx = \int (2 \ln x + 7) dx \quad 1$$

$$= 2 \int \ln x dx + 7 \int 1 dx \quad \text{Eigenschaften des Integrals}$$

$$= 2 \cdot (-x + x \ln x) + 7x + C \quad \text{Formel aus der Merkhilfe} \quad 1$$

$$= -2x + 2x \ln x + 7x + C$$

$$= 2x \ln x + 5x + C \quad 1$$

2 a) ⌚ 3 Minuten, 🧠🧠

x gibt die jeweilige Woche an, d. h. $x \in \{1; 2; 3; \dots\} = \mathbb{N}$ 0,5

In der Infinitesimalrechnung wird differenziert und integriert. Dazu ist 1

es mindestens nötig, dass sich der Funktionsgraph im Definitionsbe-
reich ohne Absetzen des Stifts durchzeichnen lässt. Dies ist nur mög-
lich, wenn die Funktion auf einem Teilintervall von \mathbb{R} definiert ist. 0,5



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK